Subject

Date

بخش یک

تحلیل فوریه

- سری فوریه :

برای توابع متناوب به کار می رود

تابع متناوب : $f(t+P) = f(t)$

در توابع مثلثاتی :
$$\begin{cases} n=1,2,\ldots & \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) \\ n=1,2,\ldots & \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) \\ cte & \end{cases}$$

تمامی این توابع دوره‌ی تناوب P دارند پس تابع زیر نیز دوره‌ی تناوب P دارد :

$$f(t) \overset{?}{=} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{P}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{P}t\right)\right]$$

Trigonometric Series

با فرض وجود و همگرایی این سری ، می خواهیم ضرایب را حساب کنیم :

نکته : توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس روابط تعامد دارند :

$-P/2 < t < P/2$

$$\int_P \cos\left(\frac{2n\pi}{P}t\right)\sin\left(\frac{2m\pi}{P}t\right)dt = 0$$

$$\int_P \cos\left(\frac{2n\pi}{P}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{P}t\right)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ P/2 & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(t)\,dt \quad (\text{سطح DC سیگنال})$$

فرمول های اویلر

$$a_n = \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{P}t\right)dt$$

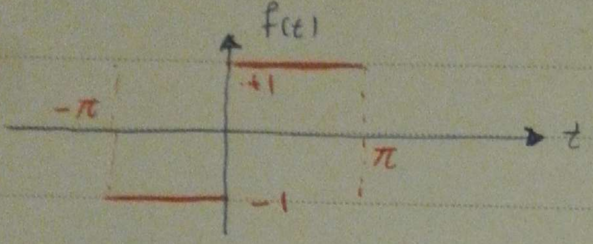
$$b_n = \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{P}t\right)dt$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

اگر این سری همگرا شود، به آن سری فوریه تابع می‌گوییم.

مثال:



$P = 2\pi$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

$a_0 = 0 \Rightarrow$ چون DC سیگنال صفر است

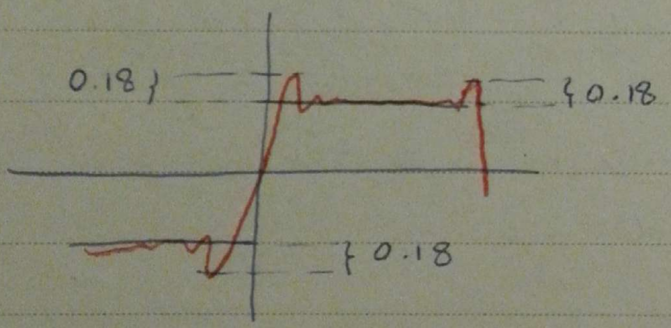
$\forall n: a_n = 0$ زیرا تابع فرد است و Cos زوج است

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi n}(\cos(n\pi)+1) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(nt)$$

پدیده گیبس

در محل‌های ناپیوستگی تابع، با هیچ دقتی نمی‌توان به مقدار واقعی تابع نزدیک شد. در مثال بالا، یک Over Shoot به اندازه 0.18 خواهیم داشت.



شرایط دیریکله

1- تابع کراندار باشد.

2- در دوره‌ی تناوب اصلی تعداد محدودی ماکسیمم و مینیمم داشته باشد.

3- در دوره‌ی تناوب اصلی، تعداد محدودی ناپیوستگی داشته باشد.

قضیه: اگر تابع $f(t)$ در شرایط دیریکله صدق کند، آنگاه سری فوریه تابع $f(t)$ وجود دارد و به مقدار تابع (میانگین حد چپ و راست) در هر نقطه میل می‌کند.

$$\hat{f}_N(t) = a_0 + \sum \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{P}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{P}t\right) \right]$$

$$\lim_{t \to \infty} \hat{f}_N(t) = f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

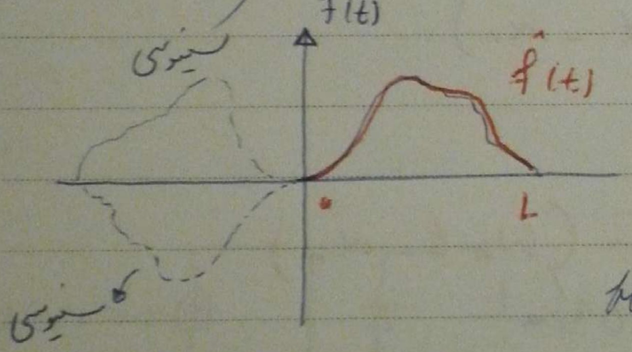
قضیه: اگر $f(t)$ یک تابع متناوب تکه‌ای پیوسته باشد و کراندار باشد و در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست باشد، آنگاه تابع دارای سری فوریه است که در هر نقطه به مقدار تابع یا میانگین حد چپ و راست همگراست.

نکته: برای تابع فرد، فقط جمله‌های سینوسی داریم:

$$b_n = \frac{4}{P}\int_0^{P/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{P}t\right)$$

برای تابع زوج، فقط جمله‌های کسینوسی داریم:

$$a_n = \frac{4}{P}\int_0^{P/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{P}t\right)$$



* اگر بخواهیم برای یک تابع دلخواه در یک بازه‌ی خاص سری فوریه بسازیم، از آن تابع، یک تابع متناوب می‌سازیم. یک راه این است که، تابع را فرد بسازیم.

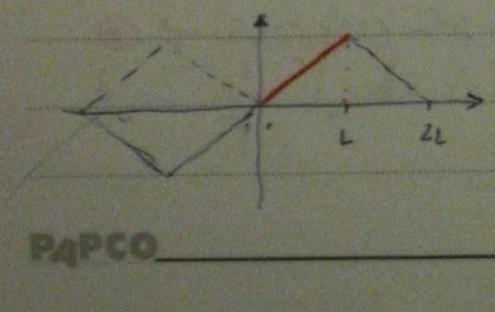
Half - Rage Expansion

نیم پریود سینوسی: $\hat{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{P}t\right)$

$P = 2L$

نیم پریود کسینوسی: $\hat{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{P}t\right)$

ممکن است همگرایی یکی از سری‌ها کندتر باشد. مثلاً یکی با صد جمله به دقت مورد نظر برسد، یکی با بیست جمله به آن دقت برسد.



می‌توانیم بسط ربع پریود داشته باشیم،
در این حالت درجه‌ی آزادی بیشتری داریم.

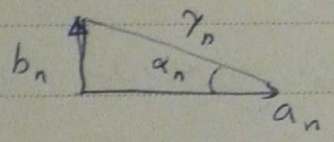
برای مثال، ضرایب ربع برد تابع $\hat{f}(t)$ بصورت زوج در نیم برد:

$$a_n = \frac{4}{P}\int_0^{P/4}\left[\hat{f}(t) + (-1)^n \hat{f}(P/2 - t)\right]\cos\left(\frac{2n\pi}{P}t\right)dt$$

و ضرایب ربع برد تابع $\hat{f}(t)$ به صورت سینوسی حول نیم برد:

$$b_n = \frac{4}{P}\int_0^{P/4}\left[\hat{f}(t) - (-1)^n \hat{f}(P/2 - t)\right]\sin\left(\frac{2n\pi}{P}t\right)dt$$

⊛ می‌توان سری فوریه را به صورت زیر نشان داد



$$\gamma_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

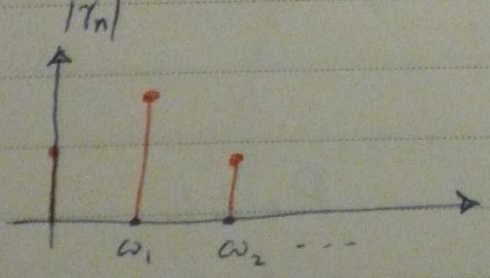
$$\alpha_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

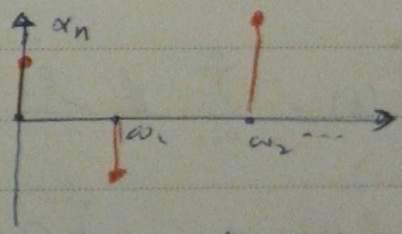
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n \cos\left(\frac{2n\pi}{P}t - \alpha_n\right)$$

$\frac{2n\pi}{P} \rightarrow \omega_n$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n \cos(\omega_n t - \alpha_n)$$

فرکانس زاویه‌ای





طیف دامنه سیگنال (Spectrum)

طیف فاز سیگنال

⊛ یک روش دیگر نمایش به صورت زیر است:

$$\sin x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Subject
Date

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \qquad C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

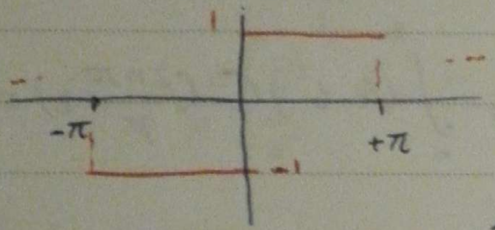
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - jb_n}{2} e^{j\frac{2n\pi}{P}t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-j\frac{2n\pi}{P}t}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\frac{2n\pi}{P}t}$$

می توان نشان داد:

$$C_n = \frac{1}{P}\int_P f(t)\, e^{-j\frac{2n\pi}{P}t}$$

مثال:

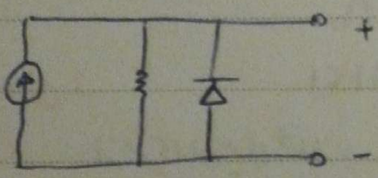


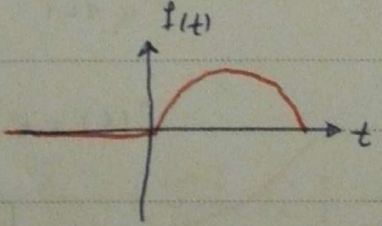
$$f(t) = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{4}{n\pi} \sin nt \qquad P = 2\pi$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum \frac{\sin(n\pi/2)}{n} = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

مثال:





سری فوریه تابع را تشکیل می دهیم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin t\, dt = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cos(nt)\, dt = \begin{cases} -\frac{2}{\pi(n^2-1)} & \text{زوج} \\ 0 & \text{فرد} \end{cases}$$

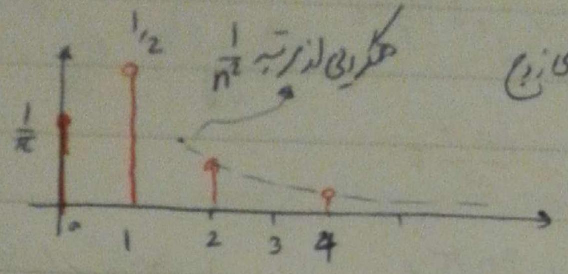
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \sin(nt)\, dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 1 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

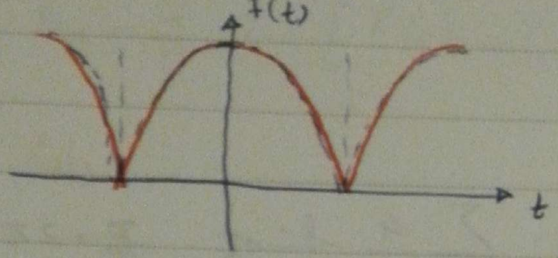
Subject
Date

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{-2}{\pi(n^2-1)} \cos(nt)$$



طیف دامنه فردی تمام هارمونیک های زوج را دارد.

مثال:



$$f(t) = 4 - t^2 \qquad |t| \leq 2$$

از بسط نیم پریود کسینوسی استفاده می کنیم

$$b_n = 0$$

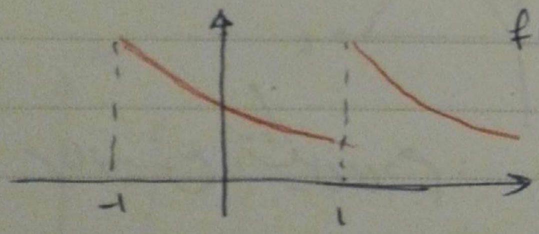
$$a_n = \frac{4}{p} \int_0^2 (4-t^2) \cos\left(\frac{2n\pi}{p} t\right) dt$$

$$a_0 = \frac{8}{3} \; ; \; a_n = \frac{16 \times (-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{8}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2} t\right)$$

حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ با استفاده از سری بالا $\frac{\pi}{12}$ می شود

مثال:



$$f(t) = e^{-t}, \quad |t| \leq 1$$

از سری فوریه مختلط استفاده می کنیم:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\pi t}$$

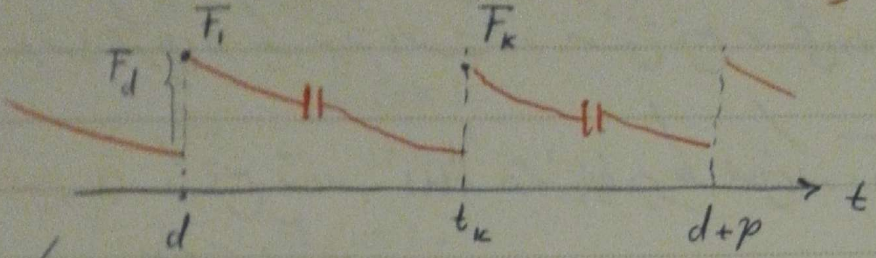
$$C_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t) e^{-jn\pi t} = \frac{(-1)^n (e - 1/e)(1 - jn\pi)}{2(1+n^2\pi)}$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\{C_n\} \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}\{C_n\}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

بررسی حالتهای تابع در حالت همگرایی ضرایب سری فوریه



مقدار تابع در ناپیوستگی اول $F_1 = f(d^+) - f(d^-) = f(d^+) - f(d+p^-) = F_d$

$$F_k = f(t_k^+) - f(t_k^-)$$

فرض کنید t_k تنها ناپیوستگی است:

$$a_n = \frac{2}{p}\left[\int_{d^+}^{t_k^-} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{p}t\right)dt + \int_{t_k^+}^{d+p^-} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{p}t\right)dt\right]$$

جزء به جزء

$$= \frac{2}{p}\left\{ f(t)\frac{p}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{p}t\right)\Big|_{d^+}^{t_k^-} + f(t)\frac{p}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{p}t\right)\Big|_{t_k^+}^{d+p^-} + -\frac{p}{2n\pi}\cdot\frac{2}{p}\int_{d^+}^{d+p^-} f'(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{p}t\right)dt \right\}$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{N} F_k \sin\left(\frac{2n\pi}{p}t_k\right) - \frac{p}{2n\pi}b'_n$$

$b'_n =:$ ضرایب سینوس سری فوریه مشتق تابع

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\sum_{n=1}^{K} F_k \cos\left(\frac{2n\pi}{p}t_k\right) - \frac{p}{2n\pi}a'_n$$

$a'_n =:$ ضرایب کسینوس سری فوریه مشتق تابع

اگر تابع ناپیوسته باشد، حاصل سیگما عددی ثابت است. پس a_n و b_n همگرایی از مرتبه $\frac{1}{n}$ دارند

PAPCO

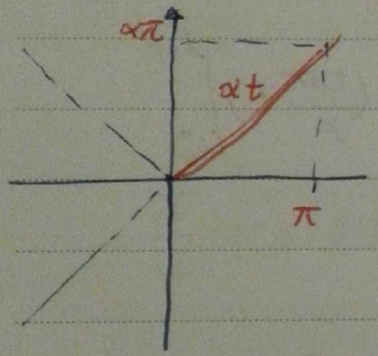
Scanned by CamScanner

ولی اگر پیوسته باشد، در واقع F_k ها صفر هستند و در نتیجه حاصل $\sum$ صفر می‌شود. پس مرتبه‌ی همگرایی از یک بزرگتر است و به مشتق تابع بستگی دارد.

قضیه ۱) اگر تابع متناوب $f(t)$ در شرایط دیریکله صدق کند، آنگاه ضرایب سری فوریه از رده ا جا به بسمت می‌آیند.

قضیه 2) اگر تابع متناوب $f(t)$ و $(k-1)$ مشتق اولش در شرایط دیریکله صدق کنند و همه جا پیوسته باشند آنگاه ضرایب سری فوریه $f(t)$ با سرعت $\frac{C}{n^{k+1}}$ به سمت صفر همگرا می‌شوند

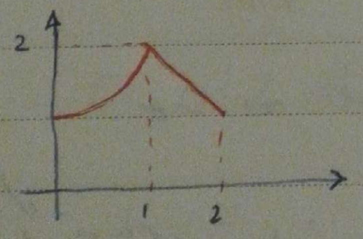
اگر مشتق kام ناپیوسته باشد، سرعت همگرایی ضرایب از $\frac{C}{n^{k+1}}$ بیشتر نیست



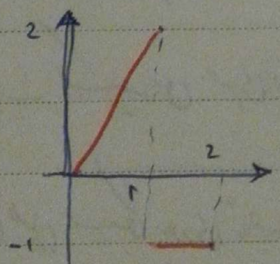
مثال: سری فوریه تابع روبرو:

مثال: تابع f را در نظر بگیرید:

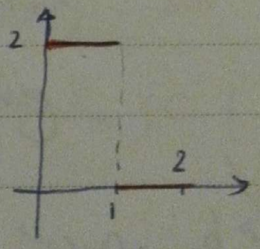
$$f = \begin{cases} 1+t^2 & 0<t<1 \\ 3-t & 1<t<2 \end{cases}$$



f



f'



f''

PAPCO

$$a_n = \frac{-2}{2n\pi} \left\{ \frac{1}{n\pi} \left[(+1) \cos\left(\frac{2n\pi}{2} \cdot 0\right) - 3\cos\left(\frac{2n\pi}{2}\right) \right] + \frac{2}{2n\pi} \left[-2\sin\left(\frac{2n\pi}{2}\right) \right] \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{3\cos(n\pi) - 1}{(n\pi)^2} \\ b_n = \dfrac{\cos(n\pi) - 1}{(n\pi)^3} \end{cases}$$

مثال : $f(t) = \begin{cases} \sin t & -\pi \leq t < 0 \\ t - t^2 & 0 \leq t < 1 \end{cases}$

مشتق دوم ناپیوسته است. حداکثر مرتبت همگرایی $\frac{C}{n+3}$ است

مثال : $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{(n-1)\sqrt{n^2+1}} & \alpha \dfrac{1}{n^2} \\ b_n = \dfrac{1}{n^2(\sqrt{n^2+1})} & \alpha \dfrac{1}{n^3} \end{cases}$

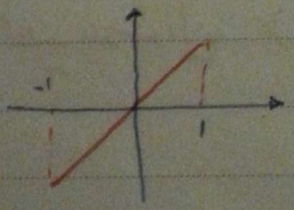
مرتبت غالب $\frac{1}{n^2}$ (مرتبت کمتر) است. پس مشتق اول حتماً ناپیوسته است.

مشتق و انتگرال سری فوریه :

قضیه ۱ : اگر $f(t)$ در شرایط دیریکله صدق کند. انتگرال $f(t)$ از انتگرال گیری جمله به جمله سری فوریه‌ی تابع به دست می آید.

قضیه ۲ : اگر f در شرایط دیریکله صدق کند و پیوسته باشد و $f'(t)$ نیز در شرایط دیریکله صدق کند، آنگاه سری فوریه $f'(t)$ وجود دارد و از مشتق گیری سری فوریه $f(t)$ قابل محاسبه است.

مثال : $f(t) = t \quad |t| \leq 1$



$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \cdot \sin(n\pi t)$$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$$\int_0^t f(u)\,du = g(t) = \frac{t^2}{2} \quad |t| \le 1 \quad = \int_0^t \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi t) \frac{(-1)^{n+1}\, 2}{n\pi} \Big] dt$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(n\pi)^2} \cos(n\pi t)$$

$$h(t) = f'(t) = 1$$

ولی با مشتق گیری از سری فوریه داریم:

$$\sum 2(-1)^{n+1} \cos(n\pi t) \ne 1$$

قضیه ۳) بهترین تقریب مثلثاتی تابع f با تعداد محدود جملات و با معیار مربع خطا (MSE) همان جملات سری فوریه است.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\frac{2n\pi}{P}t}$$

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-N}^{N} D_n e^{j\frac{2n\pi}{P}t}$$

$$\varepsilon = \int_P |f(t) - \hat{f}(t)|^2 dt \longrightarrow \min \Rightarrow D_n = C_n$$

مزدوج مختلط

$$\varepsilon = \int \Big[\sum_{n=-N}^{N} (C_n - D_n) e^{j\frac{2n\pi}{P}t} + \sum_{\substack{n>N \\ n<-N}} C_n e^{j\frac{2n\pi}{P}t} \Big] \times (C.C.)\, dt$$

$$\Rightarrow \varepsilon = P \sum_{n=-N}^{N} |D_n - C_n|^2 + P \sum_{\substack{n>N \\ n<-N}} |C_n|^2$$

این عبارت صفر می‌شود | خطای تقریب ما

اگر $D_n = C_n$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2n\pi}{2}t} \quad (\text{Parseval})$$

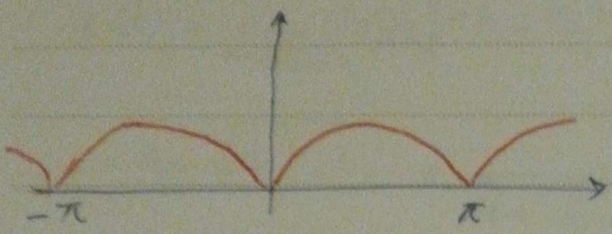
قضیه پارسوال

$$\text{توان سیگنال} = \frac{1}{T} \int |f(t)|^2 dt = \sum_n |C_n|^2$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date



مثال: $f(t) = |\sin t|$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1}\cos(nt)$$

سری $S = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2 5^2} + \frac{1}{5^2 7^2} \dots$ را محاسبه کنید.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2}{(n-1)^2(n+1)^2} \Rightarrow S = \frac{\pi^2-8}{16}$$

* کاربرد سری فوریه در محاسبه حل خصوصی معادلات دیفرانسیل خاص: (حل حالت ماندگار)

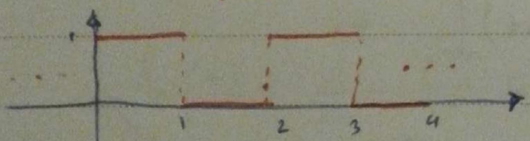
$$a_0 f(t) + a_1 f'(t) + \dots + a_m f^{(m)}(t) = g(t)$$ ← $g(t)$ پریودیک و دارای سری فوریه

$$g(t) = \sum_n g_n e^{j\frac{2n\pi}{P}t} \qquad f(t) = \sum_n C_n e^{j\frac{2n\pi}{P}t}$$

با جایگذاری $f(t)$ در معادله، C_n ها را محاسبه می‌کنیم. و خواهیم داشت:

$$C_n = \frac{g_n}{\sum_{k=0}^{m} a_k\left(j\frac{2n\pi}{P}\right)^k}$$

مثال ۱)



$$y'' + 3y' + 2y = f(t)$$
$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ فرد}}}^{\infty} \frac{-j}{n\pi} e^{jn\pi t} \qquad y_p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\pi t}$$

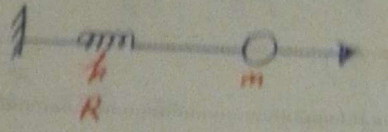
$$\Rightarrow \left[(jn\pi)^2 + 3(jn\pi) + 2\right] C_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=0 \\ -j/n\pi & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

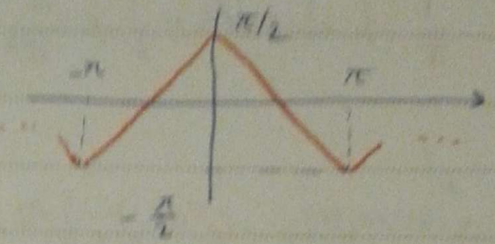
Subject
Date

$$\Rightarrow c_n = \begin{cases} \dfrac{-j\pi n}{(j\pi n)^2 + 3(j\pi n) + 2} & \text{فرد } n \\ \dfrac{1}{4} & n = 0 \end{cases}$$



مثال 2)

$F(t) =$



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F - kx - R\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = F(t)$$

$$\begin{cases} m = 1\,kg \\ k = 25\ N/s \\ R = 0.05\ N/s \end{cases}$$

برای f : $\omega = \frac{2\pi}{P} = 1$

فرکانس تشدید : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5$

سری فوریه F(t) را بدست می‌آوریم:

$$F(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4}{n\pi^2}\cos(nt)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right]$$

$a_0 = 0$

با جایگذاری x(t) در معادله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -a_n m n^2 + k a_n + R b_n n = \frac{4}{\pi n^2} \\ -R a_n n - b_n n^2 m + k b_n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4(25-n^2)}{\pi n^2\left[(25-n^2)^2 + (0.05)^2 n^2\right]}, \quad b_n = \frac{0.05n}{25-n^2}a_n$$

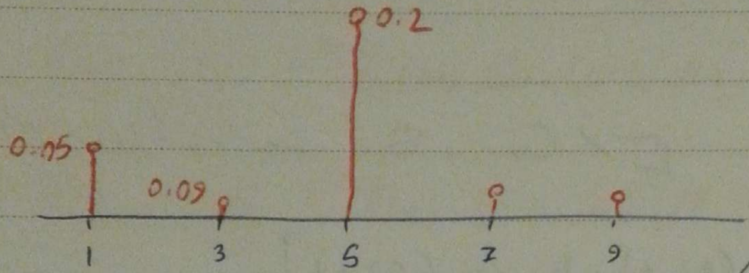
PAPCO

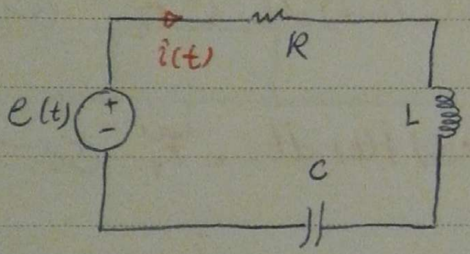
می توانیم $x(t)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$x(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} A_n \cos(nt - \varphi_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{4}{\pi n^2 \sqrt{(25-n^2)^2 + (0.05n)^2}}$$

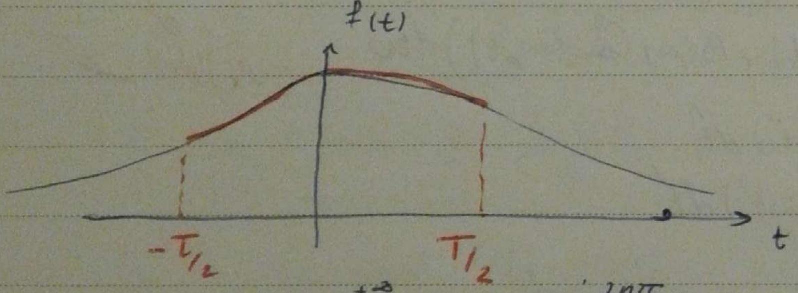
$$\varphi_n = tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = tg^{-1}\left(\frac{0.05n}{25-n^2}\right)$$





مثال: نشان دهید اگر یکی از هارمونیک ها برابر فرکانس طبیعی باشد، جریان زیاد می شود.

انتگرال فوریه:



$$f_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\frac{2n\pi}{T}t}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t') e^{-j\frac{2n\pi}{T}t'} dt'$$

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{T} \Rightarrow \Delta\omega_n = \frac{2\pi}{t} = \omega_{n+1} - \omega_n$$

$$\Rightarrow f_T(t) = \sum \frac{1}{T}\int_T f(t') e^{-j\frac{2n\pi}{T}t'} dt' \, e^{j\frac{2n\pi}{T}t}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\Rightarrow f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\left[\int_T f(t') e^{-j\omega_n t'} dt'\right] e^{j\omega_n t} \Delta\omega_n$$

$T \to \infty \Rightarrow$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\} \rightarrow \text{تبدیل فوریه}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \rightarrow \text{معکوس تبدیل فوریه}$$

* می‌توانیم $f(t)$ را به صورت Sin , Cos بنویسیم:

$$f_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right]$$

$T \to \infty \Rightarrow$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t) dt = \mathcal{F}_c \quad \text{تبدیل فوریه کسینوسی}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) f(t) dt = \mathcal{F}_s \quad \text{تبدیل فوریه سینوسی}$$

$$f(t) = \int^{\infty} \left(A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t)\right) d\omega$$

قضیه انتگرال فوریه:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\cos(\omega t') dt'$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\sin(\omega t') dt'$$

اگر $f(t)$ در هر بازه‌ی متناهی تکه‌ای پیوسته باشد (1) و در هر نقطه مشتق چپ و راست داشته باشد (2) و $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t')| dt'$ وجود داشته باشد (3)، آنگاه انتگرال فوریه همگراست و در هر نقطه به میانگین حد چپ و راست همگرا می‌شود.

می‌توان به جای شرایط 1 و 2، شرایط دیریکله را جایگزین کرد.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

- برای تابع یک طرفه زوج :

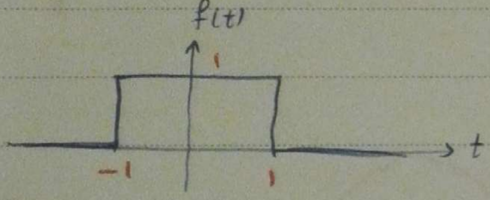
$$\begin{cases} f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(\omega) \cos(\omega t)\, d\omega \\ F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t)\, dt \end{cases}$$

- برای تابع یک طرفه یا فرد :

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(\omega) \sin(\omega t)\, d\omega$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(\omega t)\, dt$$

مثال:



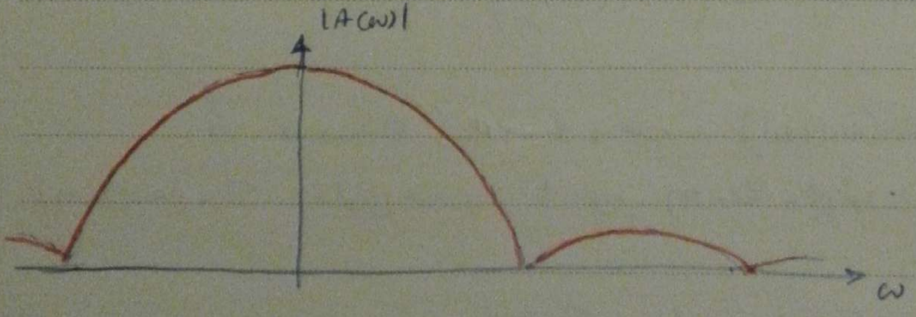
تابع زوج است ، پس از تبدیل فوریه کسینوسی استفاده می کنیم:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') \cos(\omega t')\, dt' = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos(\omega t')\, dt'$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

نکته

$$\text{Sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi(x)}$$



$$f(t) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t\, d\omega$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

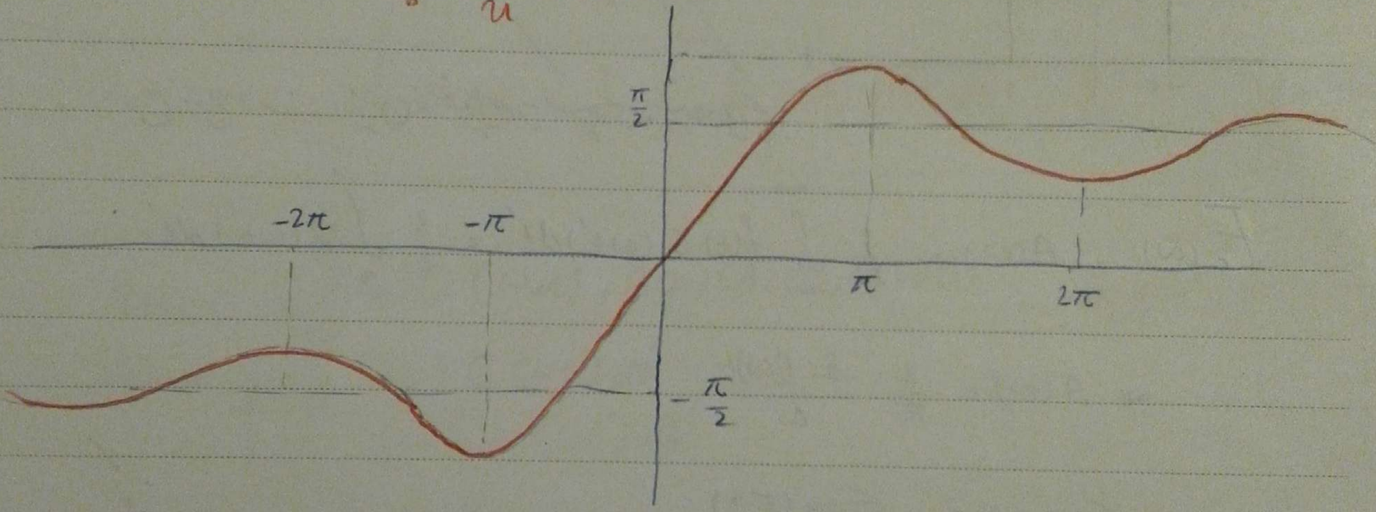
می‌توانیم حاصل انتگرال زیر را با استفاده از شکل محاسبه کنیم

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{2} \cos\omega t \, d\omega = \begin{cases} 0 & |t|>1 \\ \frac{\pi}{4} & |t|=1 \\ \frac{\pi}{2} & |t|<1 \end{cases}$$

$$\hat{f}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\sin\omega \cos\omega t}{\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\sin(\overbrace{\omega(t+1)}^{u}) - \sin(\overbrace{\omega(t-1)}^{u})}{\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\omega_0(t+1)} \frac{\sin u}{u} du - \int_0^{\omega_0(t-1)} \frac{\sin u}{u} du \right]$$

$$S_i(x) = \int_0^{x} \frac{\sin u}{u} du$$



$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \left(Si(\omega_0(t+1)) - Si(\omega_0(t-1)) \right)$$

اگر $\omega_0 \to \infty$ و $t \to 1$، عبارت $Si(\omega_0(t+1))$ به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند عبارت $Sin(\omega_0(t-1))$، به ازای مقداری از t، برابر $-Si(\pi)$ می‌شود. پس بیشینه این دو:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi}\left(\pi/2 + \frac{Si(\pi)}{\pi}\right) = \frac{1}{2} + \frac{Si(\pi)}{\pi} \simeq 0.09$$

که برابر مقدار پرش حول $t=1$ است (مقدار overshoot)

Subject
Date

تبدیل فوریه :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

برحسب f $(\omega = 2\pi f)$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)\, e^{j2\pi f t}$$

PAPCO

Subject
Date

تبدیل فوریه:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

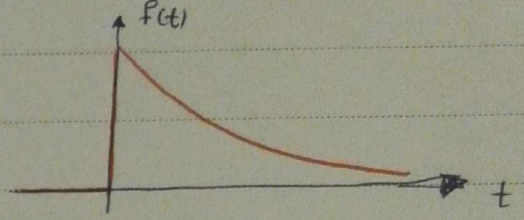
$$\delta(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0}$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tau\,\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = \tau\,\text{Sinc}(f\tau)$$

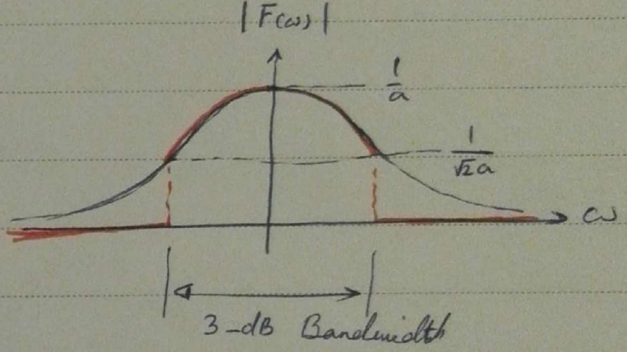
* مثال: $f(t) = e^{-at}u(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(j\omega+a)t}\,dt = \frac{1}{j\omega+a}$$



$$\Rightarrow |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2}}$$



اگر عکس تبدیل فوریه نمودار قرمز را بگیریم، تقریب خوبی مانند تابع اولیه می‌شود. بیشتر انرژی سیگنال در این بازه‌ی فرکانسی است.

خواص تبدیل فوریه:

۱) خطی بودن:

$$\mathcal{F}\{f(t) + \alpha g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} + \alpha\,\mathcal{F}\{g(t)\}$$
$$= F(\omega) + \alpha\,G(\omega)$$

۲) شیفت (تاخیر) در حوزه زمان:

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}\,\mathcal{F}\{f(t)\}$$

تاخیر در حوزه‌ی زمان، تنها باعث اختلاف فاز می‌شود.

PAPCO

Subject
Date

3) شیفت در حوزه فرکانس:

$$F(\omega-\omega_0) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} e^{j\omega_0 t} f(t)$$

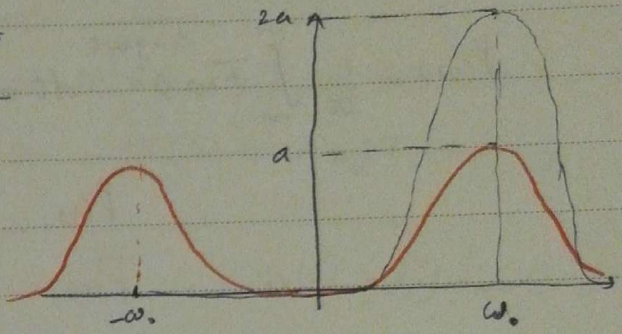
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega-\omega_0)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega')\, e^{j(\omega'+\omega_0)t}\, dt = e^{j\omega_0 t} f(t)$$

مدولاسیون

$$Re\{f(t)\, e^{j\omega_0 t}\} = f(t)\, G(\omega_0 t)$$

AM ← ; carrier →

$$Re\{f(t)\, e^{j\omega_0 t}\} = f(t)\,\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$$



4) Scale در حوزه‌ی زمان

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

مثال:

$$f(2t-1) = f(2(t-1/2)) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} e^{-j\frac{\omega}{2}} F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

5) مشتق در حوزه زمان:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n f(t)$$

6) تبدیل فوریه انتگرال تابع:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau$$

اگر $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, d\tau = 0$:

$$G(\omega) = \frac{F(\omega)}{\omega}$$

در غیر این صورت

$$G(\omega) = \frac{F(\omega)}{\omega} + \pi F(0)\, \delta(\omega)$$

↳ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, d(\tau)$

PAPCO

Subject

Date

7) مشتق در حوزه فرکانس

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-jt)\, f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \Rightarrow t\, f(t) = j\, F'(\omega)$$

$$\Rightarrow t^n f(t) = j^n F^{(n)}(\omega)$$

8) دوگانی (Duality):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{j\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}\Big|_{-\omega}$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

$$F(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$$

9) کانولوشن در حوزه زمان

$$\mathcal{F}\{g(t) * f(t)\} = G(\omega)\, F(\omega)$$

10) ضرب در حوزه زمان:

$$\mathcal{F}\{g(t)\, f(t)\} = \frac{1}{2\pi}\, G(\omega) * F(\omega)$$

11) قضیه Rayleigh (پارسوال)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2\, df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{0}^{\infty} |F_c(\omega)|^2\, d\omega = \int_{0}^{\infty} |F_s(\omega)|^2\, d\omega$$

12) وارون در حوزه‌ی زمان و فرکانس

$$f(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(-\omega)$$

13) تبدیل فوریه سیگنال حقیقی:

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} \Rightarrow F^*(\omega) = F(-\omega)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

نتایج: طیف دامنه سیگنال حقیقی زوج است
طیف فاز سیگنال حقیقی فرد است

مثال:

$\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega_0 t}$

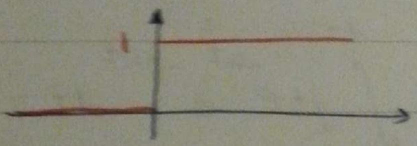
$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$ تمام انرژی‌اش در فرکانس ω_0 است

$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \longleftrightarrow \tau\,\text{Sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$

$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+a}$

$\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi\,\delta(\omega-\omega_0)+\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$

$\sin(\omega_0 t) \longleftrightarrow -j\pi(\omega-\omega_0)+j\pi(\omega+\omega_0)$



* محاسبه تبدیل فوریه $u(t)$:

در $e^{-at}u(t)$، a را به صفر میل می‌دهیم

$$\frac{1}{j\omega+a} = \frac{-j\omega+a}{\omega^2+a^2} = \frac{-j\omega}{\omega^2+a^2} + \frac{a}{\omega^2+a^2}$$

عبارت $\frac{a}{\omega^2+a^2}$ برای $\omega\neq0$ به صفر میل می‌کند ولی برای $\omega=0$ حاصل بی‌نهایت می‌شود پس
عبارتی مانند δ است. برای پیدا کردن ضریب δ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{\omega^2+a^2}d\omega = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta}$$

اثبات خاصیت:

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau = f(t) * u(t) \qquad F(\omega)\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta(\omega)\right) = \frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\,\delta(\omega)$$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

مثال: $\mathrm{Sgn}(t) \longleftrightarrow \dfrac{2}{j\omega}$

$\mathrm{Sgn}(t) = 2u(t) - 1$

مثال: $F^{-1}\left\{\dfrac{1}{\omega^2+a^2}\right\} = ?$

$$= F^{-1}\left\{\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega}\right)\right\} = \frac{1}{2a}\left(e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)\right)$$

$$= \frac{1}{2a}e^{-a|t|}$$

مثال: دوگان: $F\left\{\dfrac{1}{a^2+t^2}\right\} = \dfrac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$

مثال: $F\{e^{-at^2}\} = ?$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t}\,dt \xrightarrow{\text{مشتق نسبت } \omega} F'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} -jte^{-at^2}e^{-j\omega t}\,dt$$

جزءبجزء: $$= je^{-j\omega t}\frac{e^{-at^2}}{2a}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{2a}e^{-at^2}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\Rightarrow F'(\omega) = -\frac{\omega}{2a}F(\omega) \Rightarrow F(\omega) = ke^{\frac{\omega}{2a}}$$

مطابق پارسوال: $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2at^2}\,dt = \frac{k^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}\,d\omega$$

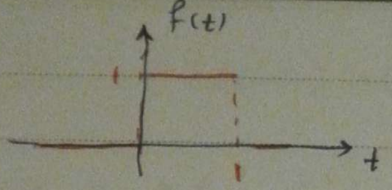
تغییر $\omega \to 2at$

$$\Rightarrow \frac{k^2 a}{\pi} = 1 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\omega/2a}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date



مثال:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4\omega}{\omega^2}\, d\omega = ?$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \sin(\omega t)\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1-\cos\omega}{\omega}$$

$$\sin^2\omega = \frac{1-\cos 2\omega}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin^4\omega}{\omega^2}\, d\omega = \int_0^{\infty} \left(\frac{1-\cos 2\omega}{2\omega}\right)^2 d\omega$$

از سوال ؛ $\Rightarrow \quad I = \pi/4$

رابطه سری فوریه و تبدیل فوریه :

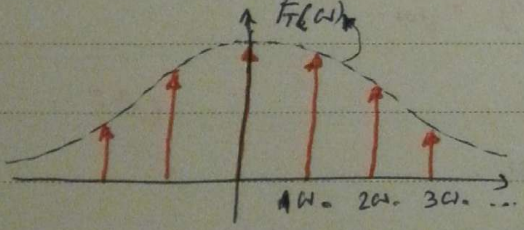
$f(t) = f_T(t) \qquad |t| < T/2$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j \overbrace{n\frac{2\pi}{T}}^{\omega_n} t} \Rightarrow C_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) e^{-j\omega_n t}\, dt$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{1}{T} \bar{F}_T(\omega_n)$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi C_n\, \delta(\omega - \omega_n) \qquad \omega_n = n\frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_0$$



$f(t) = 0 \qquad t < 0$

گذر از تبدیل فوریه به تبدیل لاپلاس برای توابع یک طرفه :

a را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که $\hat{f}(t) = e^{-at} f(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد

$$\Rightarrow \hat{F}(\omega) = \int_0^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-\overbrace{(a+j\omega)}^{s} t}\, dt$$

$$\Rightarrow \hat{F}\left(\frac{s-a}{j}\right) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

PAPCO

Laplace Transform — مرور تبدیل لاپلاس

- اگر $f(t)$ در $[0,+\infty)$ تکه‌ای پیوسته باشد و α وجود داشته باشد به نحوی که $\lim_{t \to 0} e^{-\alpha t} f(t)$ کراندار باشد، در اینصورت :

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s) e^{st}\, ds$$

خواص :

① $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$

② $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s^n F(s) + s^{n-1} f(0) + s^{n-2} f'(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)$

③ $\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$

④ $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$

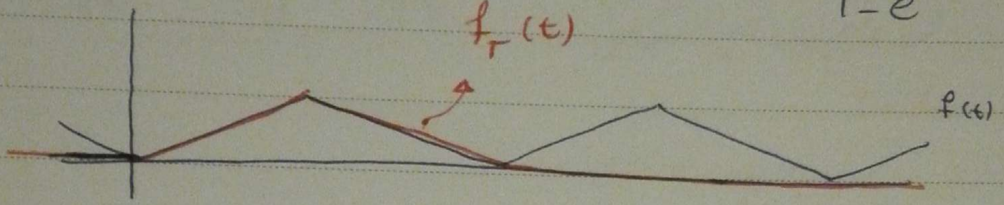
Scanned by CamScanner

Subject
Date

⑤ $\mathcal{L}\{f(t-\tau)\, u(t-\tau)\} = F(s)\, e^{-s\tau}$

⑥ $\mathcal{L}\{f(s)\, e^{\alpha t}\} = F(s-\alpha)$

⑦ $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_T(t-nT) \Rightarrow F(s) = \dfrac{F_T(s)}{1-e^{-sT}}$



⑧ $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$, $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} sF(s)$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

فصل ۲: معادلات دیفرانسیل جزئی:

مثال: معادله‌ی لاپلاس:

$$\nabla^2 u = 0 \qquad , u(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

1. degree: ← ماکسیمم توان تابع یا مشتق‌اش
2. order: ← بالاترین مرتبه مشتق

شرایط مرزی: در حوزه مکان. شرایطی که برای مرزهای مکانی تعریف می‌کنیم

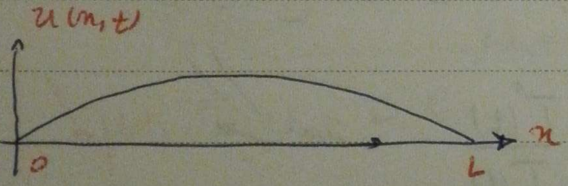
شرایط اولیه: در حوزه زمان

مثال: معادله‌ی موج: سه بعدی اسکالر ←

$$\nabla^2 u(x,y,z,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

طبق تعریف: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- معادله‌ی موج یک بعدی:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad , \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

شرایط اولیه ← (برای $u(x,0)$ و $u_t(x,0)$)

شرایط مرزی ← (برای $u(0,t)$ و $u(L,t)$)

مثال: معادله‌ی نفوذ (حرارت)

$$\nabla^2 u(\vec{v},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

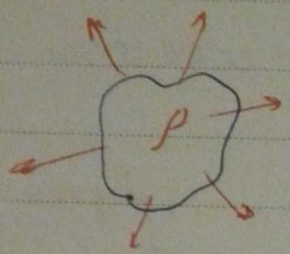
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject

Date

مثال: یک فضایی با چگالی بار ρ ای داریم، بقیه‌ی مکان‌ها باری ندارند، این بار در محیط پخش می‌شود و به دیگر مکان‌ها نفوذ می‌کند:



$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}\rho$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{(معادله پیوستگی)}$$

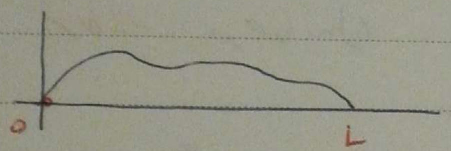
$$\Rightarrow \nabla^2 \rho(x,y,z,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Seperation of variables

تکنیک اول: جداسازی متغیرها:

معادله‌ی موج یک بعدی:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



$$I.C.\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$B.C.: u(0,t) = u(L,t) = 0$$

آیا می‌توان تابع u را به صورت ضرب چند تابع تک متغیره نوشت: $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

گام اول: تفکیک معادله:

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{c^2}X(x)T''(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

برای اینکه به ازای تمام x و t ها این تساوی برقرار شود باید $\frac{X''(x)}{X(x)}$ و $\frac{T''(t)}{T(t)}$ ثابت باشند

ابتدا شرایط مرزی را جدا می‌کنیم

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)T(t) = 0 \\ u(L,t) &= X(L)T(t) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_0 = X_L = 0$$

PAPCO

Subject

Date

گام دوم: یافتن ثابت تفکیک:

$$\begin{cases} X''(x)/X(x) = \begin{cases} \gamma^2 & i \\ 0 & ii \\ -\gamma^2 & iii \end{cases} \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

i) $X(x) = C_1 e^{-\gamma x} + C_2 e^{\gamma x}$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\gamma L} + C_2 e^{\gamma L} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

ii) $X(x) = C_1 x + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

iii) $X(x) = a \sin(\gamma x) + b \cos(\gamma x)$

$X(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$X(L) = 0 \Rightarrow \sin(\gamma L) = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots$

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad X_n(x) = a \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T_n''(t)}{T_n(t)} = -c^2 \gamma_n^2 = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 \qquad \lambda_n := \frac{n\pi c}{L} \rightarrow \text{مقادیر ویژه}$$

$$\Rightarrow T_n(t) = c_1 e^{-j\lambda_n t} + C_2 e^{j\lambda_n t}$$

$$\Rightarrow u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\{C_1 \sin(\lambda_n t) + C_2 \cos(\lambda_n t)\}$$

مود : حل مشخصه : جوابی که تنها شرایط مرزی را ارضا می‌کند. این مجموعه از توابع، مجموعه‌ی متعامدی را تشکیل می‌دهند که هر تابع، این شرایط مرزی را می‌توان از ترکیب خطی آنها به دست آورد:

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\{a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t)\}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$u(x,0) = f(x)$ با توجه به شرایط اولیه داریم:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) \longrightarrow$$ بسط نیم برد سینوسی

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$u_t(x,0) = g(x)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x) \longrightarrow$$ بسط نیم برد سینوسی

$$b_n \lambda_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

مثال: $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \sin(\lambda_n t) + B_n \cos(\lambda_n t)\right]$$

فرض کنید $u_t(x,0) = g(x) = 0$:

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ f(x-ct) + f(x+ct) \right\}$$

به این حل، حل دالامبر می گویند:

D'alembert's Solution

ایده ی کلی حل دالامبر برای معادله موج یک بعدی:

$$u(x,t) = \Psi(x-ct) + \Phi(x+ct)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تغییر متغیر:

$x - ct = \xi \qquad x + ct = v$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = u_\xi + u_v$$

$u_{xx} = \ldots \qquad u_{tt} = \ldots$

با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial v} = 0$$

فرم کانونی معادله موج

$$u(x,0) = \psi(x) + \phi(x) = f(x)$$

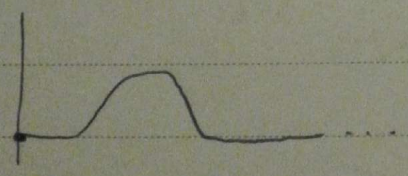
$$u_t(x,0) = c\left(-\psi'(x) + \phi'(x)\right) = g(x) \Rightarrow \phi'(x) - \psi'(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(x')dx'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(x')dx' \\ \psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(x')dx' \end{cases}$$

f_0 و g_0 را اینگونه تعریف می‌کنیم که f و g را حول صفر فرد تکمیل کرده و با پریود $2L$ تکراری کنیم.

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f_0(x-ct) + f_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_0(x')dx'$$

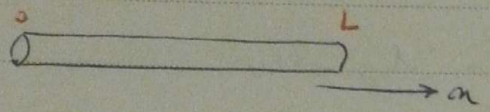
- می‌توان به ازای شرایط مرزی غیرصفر و یا وجود ناهمگنی در معادله، باز هم فرم جواب دالامبر را بدست آورد.



+ اگر یک سر ریسمان را باز بگذاریم، دیگر موج برگشتی نخواهیم داشت.
یعنی دیگر عبارت $f(x+ct)$ نخواهیم داشت

Subject
Date

معادله‌ی حرارت یک بعدی :



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ T(x,0) = f(x) & \text{شرط اولیه} \\ T(0,t) = T(L,t) = 0 & \text{شرایط مرزی} \end{cases}$$

(Dirichlet B.C.)

* اگر در شرایط مرزی، مشتق $\frac{\partial T}{\partial t}(0,t)$ داشتیم به آن Noymann B.C می‌گوییم

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$U(x,0) = f(x)$

$U(0,t) = U(L,t) = 0$

از روش تفکیک متغیرها استفاده می‌کنیم:

$U(x,t) = X(x)\,T(t) \quad , \quad X(0) = X(L) = 0$

مشابه مثال‌های قبل:

$$\frac{X''}{X} = -\gamma^2 \Rightarrow X_n = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ , \ \gamma_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Rightarrow T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \ , \ \lambda_n = \frac{n\pi C}{L} \Rightarrow U_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$\Rightarrow U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

یک توضیح خوب، مؤلفه‌ی اول است، زیرا به صورت نمایی کوچک می‌شوند

$$\approx U(x) = A_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_1^2 t}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner